Chapitre 7 : Polynôme caractéristique, valeurs propres, espaces propres

Définition. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On dit que λ est une *valeur propre de* f s'il existe $u \in E$, $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda \cdot u$. On dit que u *est vecteur propre de valeur propre* λ.

Soit $E_\lambda = \{$ vecteurs propres de valeurs propres $\lambda\} \cup \{0\}$.
Si u est un vecteur propre de f, alors le sous-espace vectoriel $Vect(u)$ est *stable* par f. Autrement dit $f(Vect(u)) = Vect(u)$. La direction de u est préservée par f.

Proposition 1. *Soit $f : E \to E$ une application linéaire avec valeur propre λ. Alors E_λ est un sous-espace vectoriel de E, et $dim(E_\lambda) \geq 1$.*

Démonstration. On montre que
- E_λ contient le vecteur 0 ;
- Si $u_1, u_2 \in E_\lambda$, alors $u_1 + u_2 \in E_\lambda$; et
- Si $u \in E_\lambda$, et si $a \in \mathbf{K}$, alors $au \in E_\lambda$.

Par définition, E_λ contient 0. Si u_1 et $u_2 \in E_\lambda$, alors $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2)$. Donc $u_1 + u_2 \in E_\lambda$. En plus, si $u \in E_\lambda$ et $a \in \mathbf{K}$, alors $f(au) = af(u) = a(\lambda u) = \lambda(au)$. Donc $au \in E_\lambda$.
On a donc montré que E_λ est un sous-espace vectoriel. En plus, par définition, comme λ est une valeur propre de f, il existe un vecteur propre de valeur propre λ. Autrement dit, E_λ contient un élément non nul. Ceci implique que $dim(E_\lambda) \geq 1$.

□

Définition. E_λ est *l'espace propre* de valeur propre λ.

Remarque. Si λ, μ sont deux valeurs propres de f qui sont distinctes, alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$. Autrement dit, $E_\lambda + E_\mu = E_\lambda \oplus E_\mu$.

Définition. $Spec(f) = \{\lambda \in \mathbf{K} | \lambda$ *est une valeur propre de* $f\}$. ($Spec(f) =$ le *spectre de* f).

On va définir maintenant les valeurs propres et vecteurs propres des matrices.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $A = Mat(f; \mathcal{B})$. On dit que λ est <u>valeur propre de A</u> si λ est valeur propre de f. Soit $u \in E$, et $X = Mat(u; \mathcal{B})$. On dit que X est <u>vecteur propre</u> de valeur propre λ de A si u est vecteur propre de valeur propre λ de f.

Remarque. Autrement dit,

λ est valeur propre de la matrice A de vecteur propre X si et seulement si $AX = \lambda X$.

Les résultats suivantes donnent une méthode pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice, en utilisant le *polynôme caractéristique*.

Proposition 2. *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B}$. Soit $f : E \to E$ un endormorphisme et $A = Mat(f; \mathcal{B})$. Alors λ est valeur propre de f (et de A) si et seulement si* $\det(f - \lambda id) = 0$. *Cette condition est équivalente à* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Démonstration : Comme f est un endomorphisme de E, si $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $f - \lambda id$ est aussi un endomorphisme de E. En plus $Mat((f - \lambda id); \mathcal{B}) = A - \lambda I_n$.
Comme $f - \lambda id$ est un endomorphisme, d'un espace vectoriel de dimension finie, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f - \lambda id$ est un automorphisme;
- $f - \lambda id$ est injectif;
- $\ker(f - \lambda id) = 0$;
- $\det(f - \lambda id) \neq 0$;
- $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$.

Soit λ une valeur propre de f avec valeur propre u. Alors $f(u) = \lambda u$, ou bien $(f - \lambda id)(u) = 0$. Ceci implique que $u \in \ker(f - \lambda id)$. En particulier, $E_\lambda = \ker(f - \lambda id)$, et donc $f - \lambda id$ n'est pas injectif. Par l'équivalence des conditions au dessus, on a : si λ est valeur propre, alors $\det(f - \lambda id) = 0$. On a aussi la réciproque : si $\det(f - \lambda id) = 0$, alors il existe $u \in E$ dans le noyau. Ce vecteur est vecteur propre de f de valeur propre λ.

□

Définition. (**Polynôme caractéristique d'une matrice**) Soit A une matrice carrée $n \times n$ avec coefficients dans un corps $\mathbf{K}$. *Le polynôme caractéristique de* A est le polynôme de $\mathbf{K}[X]$ donné par $\det(A - XI_n)$. Notation : Le polynôme caractéristique de A est appelé χ_A.

Proposition 3. *Soient A et B deux matrices qui sont semblables. Alors les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B sont identiques.*

Démonstration. Si A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P tel que $B = P^{-1}AP$. On a aussi $B - XI_n = P^{-1}(A - XI_n)P$. Comme le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, on a

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(P^{-1}(A - XI_n)P)\\ &= \det(P)^{-1}\det(A - XI_n)\det(P)\\ &= \det(P)^{-1}\det(P)\det(A - XI_n)\\ &= \det(A - XI_n) = \chi_A.\end{aligned}$$

□

Remarque. Rappelons que deux matrices A et B sont semblables si elles représentent le même endormorphisme, par rapport à deux bases différentes. Autrement dit, soit f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $A = Mat(f; \mathcal{B})$ et $Mat(f; \mathcal{B}')$ sont semblables. Par la proposition 3, elles ont la même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique dépende uniquement de f, pas de la base. Cette remarque justifie la définition suivante.

Définition. (**Polynôme caractéristique d'une matrice**) Si $f : E \to E$ est un endomorphisme, le polynôme caractéristique χ_f de f est le polynôme caractéristique d'une matrice $Mat(f; \mathcal{B})$ pour une base $\mathcal{B}$ de E. Autrement dit, $\chi_f = \det(f - Xid)$.

Proposition 4. *Soit A une matrice carrée. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$. En particulier, deux matrices semblables ont les mêmes spectres.*

Démonstration : Ceci est une conséquence du fait que le determinant de $A - XI_n$ est exactement le polynôme caractéristique. Plus précisément, λ est racine du χ_A si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Par la proposition 2, $\chi_A(\lambda) = 0$ si et seulement si λ est valeur propre de A. □
On peut alors trouver les valeurs propres de A (et de f).
On a aussi vu que, pour chaque valeur propre λ, le sous-espace propre de valeur propre λ est le noyau $\ker(\lambda id - f)$. On peut trouver alors tous les espaces propres de f.

J'énonce maintenant un théorème très utile pour étudier des matrices et leurs valeurs propres. Les conséquences et la démonstration de ce résultat vont être traités en profondeur l'année prochaine, en

L2. Pour cette année, dans les exercices, on va simplement remarquer la validité de ce théorème pour certains cas.

Théorème. Cayley-Hamilton (sans démonstration) *Soit A une matrice carrée. Alors*

$$\chi_A(A) = 0.$$

(Autrement dit, si on remplace la variable X du polynôme caractéristique par la matrice, on trouve la matrice 0.)

Pour le reste de ce chapitre, on montrera comment trouver des valeurs propres, vecteurs propres, et, en plus, on étudiera la notion de *diagonalisabilité* d'une matrice.
Notation : Si D est une matrice diagonale de taille n avec termes d_i sur le diagonal, on note $D = diag(d_1, \dots, d_n)$, i.e.,

$$diag(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 1. Soit $D \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonale $D = diag(d_1, \dots, d_n)$. Alors $\chi_D = \prod_{i=1}^{n}(d_i - X)$. Les racines de ce polynôme sont exactement $\{d_1, \dots, d_n\}$. Donc le spectre de D est l'ensemble $\{d_1, \dots, d_n\}$.
Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application linéaire telle que $Mat(f; \mathcal{C}) = D$, où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$. (I.e., $f(v) = D \cdot v$.) Chaque élément e_i de la base $\mathcal{C}$. de $\mathbf{R}^n$ est un vecteur propre de valeur propre d_i.

Exemple 2. Soit $f_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la rotation d'angle θ, où $0 \leq \theta < 2\pi$. Alors f_θ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$, et $A_\theta = Mat(f_\theta; \mathcal{C})$ est de la forme :

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On trouve $\chi_{f_\theta} = \chi_{A_\theta} = X^2 - 2\cos\theta + 1 \in \mathbf{R}[X]$. Si $\theta = 0$, alors $f_0 = id$, et l'unique valeur propre est 1, avec $E_1 = \mathbf{R}^2$. Si $\theta = \pi$, alors l'unique valeur propre est -1, et $E_{-1} = \mathbf{R}^2$. Si θ n'est pas un multiple de π, alors f_θ (et A_θ) n'a pas de valeurs propres réelles. (Ceci correspond au fait que une rotation ne preserve pas une direction. Si f_θ avait un vecteur propre u, la droite engendré par u devrait être stable par f_θ. Comme f_θ est une rotation, il ne preserve pas une droite quand θ n'est pas un multiple de π.)

Exemple 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donné par $f(v) = Av$. Alors $\chi_A(X) = (X^2 - X - 2) = (X-2)(X+1)$. Le spectre de A est $\{2, -1\}$. On sait que $\dim(E_2) \geq 1$, et $\dim(E_{-1}) \geq 1$. En particulier, $\dim(E_2 \oplus E_{-1}) \geq 2$. Mais $E_2 \oplus E_{-1} \subset \mathbf{R}^2$. Donc l'unique possibilité est : $\dim(E_2) = 1$ et $\dim(E_{-1} = 1$.
On va trouver maintenant les espaces propres E_2 est E_{-1}. Le vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2$ si et seulement si : $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Donc on se ramène à la résolution d'un système linéaire homogène. On trouve : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2$ si et seulement si $x = 2y$. Donc une base de E_2 est donné par $(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

On trouvera maintenant une base de E_{-1}. Le vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}$ si et seulement si : $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On trouve : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}$ si et seulement si $x = -y$. Donc une base de E_{-1} est donné par $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

Exemple 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donné par $f(v) = Av$. Alors $\chi_A(X) = (X-1)^2$. Le spectre de A est $\{1\}$. On trouve une base de E_1 : $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, et donc $\dim(E_1) = 1$.

Définition. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On dit que f est *diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat(f;\mathcal{B})$ soit une matrice diagonale. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ est *diagonalisable* si elle est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable (par rapport à une base quelconque). Autrement dit,

A est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.

Théorème. *Soit $f : E \to E$ où $n = \dim(E)$ de base $\mathcal{B}$, et soit f un endomorphisme avec $A = Mat(f,\mathcal{B})$. Alors f (ou A) est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- *Le polynôme caractéristique χ_f peut s'ecrire de la forme $\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X)$ avec $\lambda_i \in \mathbf{K}$ pour tous k ; ET*
- *La somme directe des espaces propres est égale à E.*

Démonstration : Si A est diagonalisable, il existe $P \in M_n(\mathbf{K})$ qui est inversible, tel que $P^{-1}AP = D$ est diagonale. On a $D \in M_n(\mathbf{K})$. Donc D est de la forme $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$. La matrice D a le même polynôme caractéristique que A, $\chi_A = \chi_D = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X)$. On a donc la première propriété. En plus, comme A est semblable à D, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E tel que $Mat(f;\mathcal{B}') = D$. Donc par l'exemple 1, il existe une base de E formée de vecteurs propres de f, et donc la somme directe des espaces propres est E.
La démonstration de la réciproque est laissée en exercice.

$\square$

Remarque. Le théorème implique que $f : E \to E$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Diagonalisation d'une matrice
Si A est une matrice carrée diagonalisable, alors on donnera une méthode pour déterminer une matrice de passage P, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. (Une telle matrice de passage n'est pas unique !.)

Soit $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ l'endomorphisme $f(v) = Av$. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. (I.e., $A = Mat(f;\mathcal{C})$.)
Etape 1 : Trouver les valeurs propres (c-à-d. le spectre de A).
Etape 2 : Trouver une base de chaque espace propre. Comme A est diagonalisable, la réunion de ces bases est une base de f, qu'on appelle $\mathcal{B}'$.

Etape 3 : Soit P la matrice de passage entre les base $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}$. Alors $P^{-1}AP = D$ est une matrice diagonale.

Considérons les exemples précédents :
Exemple 1. Une matrice diagonale est diagonalisable. A est déjà diagonale, donc on peut choisir $P = I_n$.

Exemple 2. Si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, alors A est diagonale. Sinon, alors A n'a pas de valeurs propres réelles. Donc A n'est pas diagonalisable comme matrice de $M_2(\mathbf{R})$. (On peut, par contre, la diagonaliser comme matrice de $M_2(\mathbf{C})$, mais pas comme matrice de $M_2(\mathbf{R})$.)

Exemple 3. On a trouvé des bases de E_2 et E_{-1}. Soit $\mathcal{B}'$ est la réunion de ces bases. $\mathcal{B}' = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Alors $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On va vérifier maintenant que $P^{-1}AP$ est diagonale $= diag(2, -1)$.
P est une matrice de taille 2×2, avec déterminant $= -3$. Donc $P^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$.
On va calculer $P^{-1}AP$.
Pour faire le produit, on utilise l'astuce de calcule noté dans le chapitre 4 : On place P^{-1} à gauche, et A en haut. On calcule ainsi $P^{-1}A$. Après on place P en haut, pour calculer $(P^{-1}A)P$.
Première multiplication :

$$\begin{array}{c|c|} & A \\ \hline P^{-1} & P^{-1}A \end{array}$$

Continuer à la deuxième multiplication :

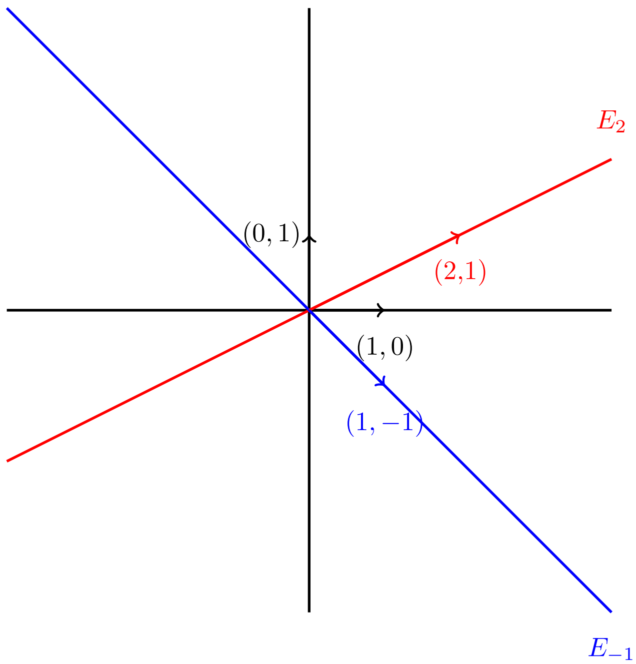
$$\begin{array}{c|c|c|} & A & P \\ \hline P^{-1} & P^{-1}A & (P^{-1}A)P \end{array}.$$

Autrement dit, on trouve

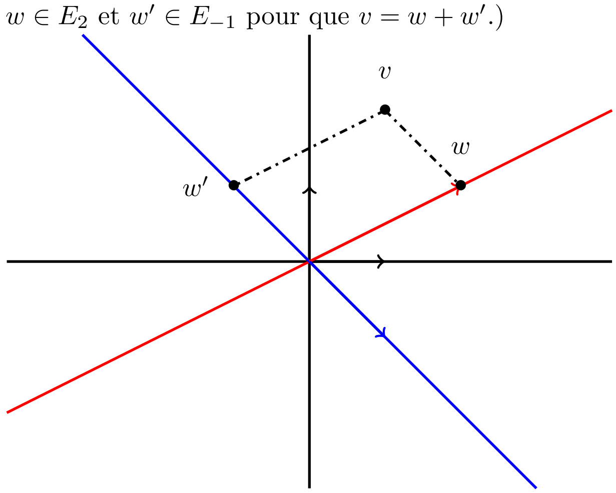
$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemple 4. Dans ce cas, A n'est pas diagonalisable. On voit ce résultat par le théorème. L'espace vectoriel E_1 est de dimension 1, et l'unique valeurs propre de A est 1. Donc E n'est pas la somme directe des espaces propres.

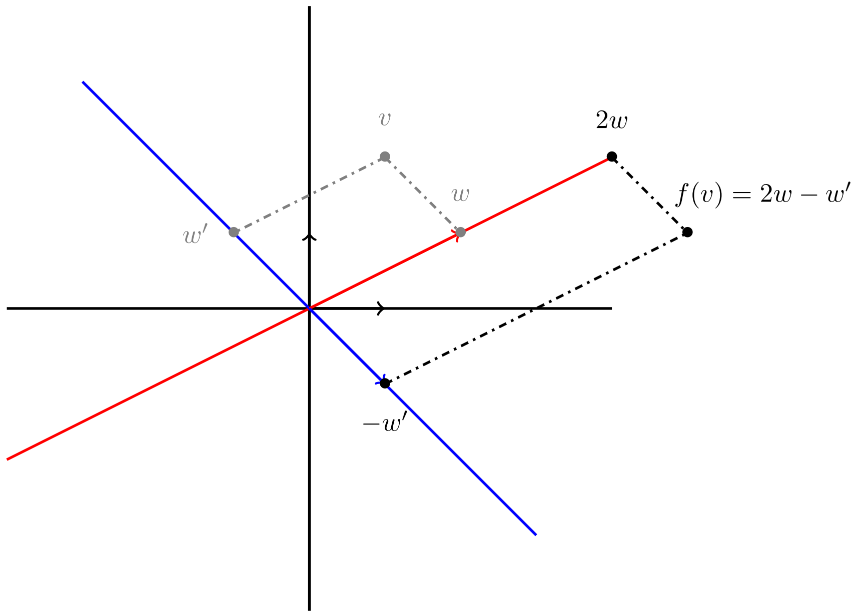
Quand une matrice est diagonalisable, les vecteurs propres et valeurs propres nous aident à visualiser les applications linéaires.
On va traiter le cas de l'exemple 3.
D'abord, on dessine les espaces propres de l'application linéaire $f(v) = Av$. On a trouvé les bases avant.



Maintenant, soit $v = (x, y)$ un point du plan. On montrera comment trouver l'image $f(v)$ géométriquement. D'abord on projette v sur E_2, parallèlement à E_{-1} pour obtenir w, et on projette v sur E_{-1} parallèlement à E_2, pour obtenir un vecteur w'. (Autrement dit, on a déterminé les uniques vecteurs $w \in E_2$ et $w' \in E_{-1}$ pour que $v = w + w'$.)



On sait que $f(w) = 2w$, $f(w') = -w'$, et donc $f(v) = 2w - w'$. Géométriquement, on peut dessiner $f(v)$:



.

Etude des matrices 2×2, avec coefficients dans $\mathbf{R}$

Dans les exemples, on a vu plusieurs exemples de matrices de $M_2(\mathbf{R})$. Maintenant on va décrire toutes les possibilités pour les matrices réelles de taille 2.

Si $A \in M_2(\mathbf{R})$, alors χ_A est un polynôme de degré 2 avec coefficients réels. Il a donc 2 deux racines (complexes), qu'on appelera r_1 et r_2.

On remarque d'abord que :

- $r_1 r_2 = \det(A)$; et
- $r_1 + r_2 = tr(A)$.

3 cas sont possibles :

(i) $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ sont distinctes ;
(ii) $r_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, et $r_2 = \overline{r_1}$, le conjugué complexe de r_1 ; ou
(iii) $r_1 = r_2 \in \mathbf{R}$.

Cas (i) : Dans ce cas, A est diagonalisable, et on a deux espaces propres, chacun de dimension 1. (On a vu ce cas dans l'Exemple 3.)

Cas (ii) : Dans ce cas, A n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$, car A n'a pas de valeurs propres réelles. (On a vu ce cas dans l'Exemple 2, où $\theta \neq 0$ ou π.

Cas (iii) : Dans ce cas, A est diagonalisable si et seulement si A est diagonale, égale à $r_1 I_2$. (Pour $A = I_2$ ou $A = -I_2$, alors A est diagonalisable. Par contre, dans l'Exemple 4, on a vu un cas de ce type qui n'est pas diagonalisable.)

Dans ce cours, on s'intéresse surtout sur les cas de matrices diagonalisables, et comment déterminer si une matrice est diagonalisable. L'année prochaine, on étudiera plus profondément les cas non diagonalisables.

FIN DU COURS