Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
Filière : L3-Mathématiques

Année 2011-2012
15 novembre, 2011

Partiel – ALGEBRE
Durée 2 heures (documents et calculatrices non autorisés)

(1) (**Question de cours**)
(a) Donner la liste de tous les sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Justifier le résultat.
(b) Donner la définition de l'abélianisée d'un groupe. Montrer que ce groupe est abélien.

(2) Notons $T_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures de déterminant non nul.
(a) Montrer que $T_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication matricielle.
(b) Montrer que le sous-ensemble $TU_n(\mathbb{R})$ de $T_n(\mathbb{R})$ formé des matrices n'ayant que des 1 sur la diagonale est un sous-groupe normal dans $T_n(\mathbb{R})$.
(c) Soit $D_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $T_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales de déterminant non nul. Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe. Est-il normal ?
(d) Montrer que $T_n(\mathbb{R})$ est isomorphe au produit semi-direct $TU_n(\mathbb{R}) \rtimes D_n(\mathbb{R})$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit G un groupe tel que chaque élément non neutre de G est d'ordre n.
(a) Montrer que n est premier.
(b) Si $n = 2$, montrer que G est abélien. Dans ce cas, montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.

(4) Soient G_1 et G_2 deux groupes, et soit $\varphi : G_1 \to G_2$ un homomorphisme de groupes.
(a) Si H_2 est un sous-groupe normal de G_2, montrer que $\{g \in G | \varphi(g) \in H_2\}$ est un sous-groupe normal de G_1.
(b) Est-il vrai que l'image d'un sous-groupe normal de G_1 est un sous-groupe normal de G_2 ? Justifier votre réponse.
(c) Soit $G = Q_8$ le groupe des quaternions. Donner un exemple d'un sous-groupe normal H de G et un automorphisme φ de G tel $\varphi(H) \neq H$.

(5) Donner la classification (à isomorphisme près) de tous les groupes abéliens d'ordre 36. Donner les facteurs invariants de chaque groupe.