UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE — ANNÉE 2014-2015
U.F.R. Sciences et Techniques — 3 novembre, 2014
Filière : L3-Mathématiques

Partiel – ALGEBRE 1

Durée 2 heures (documents et calculatrices non autorisés)

(1) (**Question de cours**) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Trouver tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Démontrer le résultat.

(2) Soit G un groupe fini.
(a) Montrer que G contient un élément d'ordre 2 si et seulement si l'ordre de G est pair.
(b) Montrer que $(ab)^2 = a^2b^2$ pour tous $a, b \in G$, si et seulement si G est abélien.
(c) Montrer que si chaque élément de G est égal à son inverse, alors G est abélien.
(d) Si G est un groupe tel que chaque élément distinct de l'élément neutre est d'ordre 2, montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.

(3) Soit $n \geq 3$, et soit $D_n = \{e, r, \ldots, r^{n-1}, s, rs, \ldots, r^{n-1}s\}$ le groupe diédral à $2n$ éléments.
(a) Soit K_1 le sous-ensemble des rotations de D_n. Montrer que K_1 est un sous-groupe. Est-il normal ?
(b) Soit K_2 le sous-groupe engendré par s. Est-il normal ?
(c) Trouver deux éléments de D_n d'ordre 2 qui engendrent D_n.
(d) Montrer que D_6 a un sous-groupe isomorphe à D_3.
(e) Soit $k \in \mathbb{N}$ un diviseur de n tel que $k \geq 3$. Montrer que D_n a un sous-groupe H_k isomorphe à D_k. Est-ce que ce sous-groupe est normal ?

(4) Soit $G = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) |\ |det(A)| = 1\}$, et soit $N = SL_2(\mathbb{C})$.
(Rappel : $SL_2(\mathbb{C}) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) |\ det(A) = 1\}$.)
(a) Montrer que G est un groupe.
(b) Montrer que N est un sous-groupe normal de G.
(c) Montrer que $G/N \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, où $\mathbb{R}$ est le groupe additif de nombres réels, et $\mathbb{Z}$ est le sous-groupe des entiers. (Indication : Considérer le sous-groupe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ multiplicatif des éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1$.)