Université de Bourgogne — Année 2013-2014
U.F.R. Sciences et Techniques — 5 novembre, 2013
Filière : L3-Mathématiques

Partiel – ALGEBRE– CORRECTION

(1) (**Question de cours)** Donner la définition d'une partition et d'une relation d'équivalence. Enoncer et démontrer le lien entre les deux notions. Enoncer et démontrer la proposition de la propriété universelle du quotient et le premier théorème d'isomorphie.

(2) Soit G un groupe fini. Si $g \in G$, on note $\mathcal{O}(g)$ l'ordre de g.

(a) Soit $g \in G$. Montrer que $\mathcal{O}(g)$ divise l'ordre du groupe G.

CORRECTION : Soit $e =$ l'élément neutre du groupe. L'ordre d'un élément g est le plus petit entier $d \geq 1$ tel $g^d = e$. Si $d =$ l'ordre de g, on a vu que le sous groupe de G engendré par g est d'ordre d. Par le théorème de Lagrange, l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe. Donc d divise n.

(b) Soit G' un autre groupe, et soit $\varphi : G \to G'$ un homomorphisme. Montrer que l'ordre $\mathcal{O}(\varphi(g))$ de $\varphi(g) \in G'$ divise $\mathcal{O}(g)$.

CORRECTION : On a vu que $g^k = e$ si et seulement si k est un multiple de l'ordre de g. Si l'ordre de g est d, alors $(\varphi(g))^d = \varphi(g^d) = \varphi(e_G) = e_{G'}$. En particulier, d est un multiple de l'ordre de $\varphi(g)$. (Ici, e_G est l'élément neutre de G, et $e_{G'}$ est l'élément neutre de G'.)

(c) Supposons que G est abélien. Soient $g, h \in G$. Si $\mathcal{O}(g)$ et $\mathcal{O}(h)$ sont premiers entre eux, montrer que $\mathcal{O}(gh) = \mathcal{O}(g)\mathcal{O}(h)$.

CORRECTION : Soit $d = \mathcal{O}(g)$= et $k = \mathcal{O}(h)$. D'abord, on a que $(gh)^{kd} = g^{kd}h^{kd} = e$, car G est abélien. Ceci implique que kd est un multiple de l'ordre de gh.
Maintenant on considère les sous-groupes $H_1 = \langle g \rangle$ et $H_2 = \langle h \rangle$ de G. $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de H_1 et un sous-groupe de H_2, donc, par le théorème de Lagrange, l'ordre de $H_1 \cap H_2$ divise d et k. Comme d et k sont premiers entre eux, l'ordre est 1, et $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.
Soit $\ell =$ l'ordre de gh. Comme G est abélien, on a $(gh)^\ell = g^\ell h^\ell$. Ceci implique que $g^\ell = h^{-\ell} \in H_1 \cap H_2$. Donc, $g^\ell = h^{-\ell} = e$. Ceci implique que ℓ est un multiple de k et de d, et comme d et k sont premiers entre eux, ceci implique que ℓ est un multiple de kd.
En conclusion, l'ordre de gh est égale à dk.

(d) Si G n'est pas abélien, est-ce que la propriété de (c) est vraie ? (Indication : considérer le groupe $G = D_3$.)

CORRECTION : NON. Contre-exemple : $G = D_3$, $g = r$ est d'ordre 3, $h = s$ est d'ordre 2, et rs est d'ordre 2.

(3) Soit $G = GL_2(\mathbb{R})$ le groupe de matrices 2×2 avec coefficients dans $\mathbb{R}$ et de déterminant non nul. Soit $H = O_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de matrices $A \in G$ telles que $A \ {}^tA = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que H est un sous-groupe de G.

CORRECTION : L'identité appartient à H, donc H n'est pas vide.
On utilise les faits que ${}^t(AB) ={}^t B \ {}^tA$, et que ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$. En particulier, si $A \ {}^tA = I$ et $B \ {}^tB = I$, alors $(AB) \ {}^t(AB) = AB \ {}^tB \ {}^tA = I$. En plus, si $A \ {}^tA = I$, alors ${}^tA = A^{-1}$, et donc $I = A^{-1}({}^tA)^{-1} = A^{-1}({}^tA^{-1})$.

(b) Est-ce que H est un sous-groupe normal ? Justifier votre réponse.

CORRECTION : NON. Donner un contre-exemple : Par exemple, on choisit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in H$, et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. On calcul $CBC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \notin H$.

(c) Déterminer le centre $Z(H)$ de H.

CORRECTION : $Z(H) = \{\pm I\}$. D'abord, I et $-I$ commutent avec toute matrice de $GL_2(\mathbb{R})$, donc aussi avec toute matrice de H. Donc $\{\pm I\} \subset Z(H)$. Pour l'autre inclusion, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z(H)$. En particulier, A commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ceci implique que $a = d$, et $b = c = 0$. Finalement, comme $A \in H$, on a que $a = \pm 1$.

(4) Soient G et G' deux groupes, et soit $\varphi : G \to G'$ un homomorphisme. Soit $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs dans G, et $D(G')$ le sous-groupe de G' engendré par les commutateurs dans G'. Soient $\pi : G \to Ab(G)$ et $\pi' : G' \to Ab(G')$ les homomorphismes quotients. (Rappel : $Ab(G) = G/D(G)$ et $Ab(G') = G'/D(G')$.)

(a) Montrer que $\varphi(D(G))$ est un sous-groupe de $D(G')$.

CORRECTION : On montre d'abord que $\varphi(D(G))$ est un sous-ensemble de $D(G')$. Chaque élément de $D(G)$ est produit de commutateurs. Si $[a, b]$ est un commutateur quelconque de G, alors $\varphi([a, b]) = \varphi(aba^{-1}b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1} = [\varphi(a), \varphi(b)]$. C.-à-d., l'image d'un commutateur de G est un commutateur de G'. Comme φ est un homomorphisme, l'image d'un produit de commutateurs de G est un produit de commutateurs de G', et donc appartient à $D(G')$.

En plus, on va montrer que, en général, si H est un sous-groupe de G et φ est un homomorphisme de G à G', alors, $\varphi(H)$ est un sous-groupe de G'. $\varphi(H)$ est non vide, car il contient l'élément neutre. Si $y_1, y_2 \in \varphi(H)$, alors il existe x_1 et $x_2 \in H$ tels que $\varphi(x_1) = y_1$, et $\varphi(x_2) = y_2$. On a $y_1 y_2^{-1} = \varphi(x_1)\varphi(x_2)^{-1} = \varphi(x_1 x_2^{-1}) \in \varphi(H)$, car $x_1 x_2^{-1} \in H$.

(b) En déduire que si G' est abélien, alors $D(G)$ est contenu dans le noyau de φ.

CORRECTION : Comme G' est abélien, $D(G') = \{e_{G'}\}$. Par (a), $\varphi(D(G)) \subset \{e_{G'}\}$, et donc $D(G) \subset ker(\varphi)$.

(c) Montrer qu'il existe un unique homomorphisme $\overline{\varphi} : Ab(G) \to Ab(G')$ tel que $\overline{\varphi} \circ \pi = \pi' \circ \varphi$.

CORRECTION : Le groupe $Ab(G')$ est abélien, et l'homomorphisme $\pi' \circ \varphi : G \to Ab(G')$ satisfait les hypothèses de (b). Donc $D(G) \subset ker(\pi'\varphi)$. Par le théorème universel du quotient, il existe un unique homomorphisme $\overline{\varphi} : G/D(G) = Ab(G) \to Ab(G')$ tel que $\overline{\varphi} \circ \pi = \pi' \circ \varphi$.