UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
Filière : L3-Mathématiques

ANNÉE 2012-2013
6 novembre, 2012

Partiel – ALGEBRE
Durée 2 heures (documents et calculatrices non autorisés)

(1) (**Question de cours**) Enoncer et démontrer la proposition de la propriété universelle du quotient et le premier théorème d'isomorphie.

(2) Soit

$$G = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}.$$

(a) Montrer que G est un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{C})$. Est-il normal ?
(b) Déterminer l'ordre de l'élément $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

(3) Soit G un groupe avec l'élément neutre e, et soit $h \in G$.
(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $h^n = e$ si et seulement si n est un multiple de l'ordre de g.
(b) Soit $g \in G$. Montrer que l'ordre de ghg^{-1} est égal à l'ordre de h.
(c) Soit $\varphi : G_1 \to G_2$ un homomorphisme entre deux groupes, et soit $g_1 \in G_1$. Supposons que l'ordre de g_1 est fini. Montrer que l'ordre de l'élément $g_2 = \varphi(g_1) \in G_2$ divise l'ordre de $g_1 \in G_1$.

(4) Soit G un groupe et $g \in G$. On appelle *centralisateur* de g l'ensemble

$$C_g(G) = \{x \in G | gx = xg\}.$$

(a) Montrer que $C_g(G)$ est un sous-groupe de G.
(b) Déterminer le centralisateur de chaque élément du groupe dièdral : D_n, $n \geq 3$.
(c) Est-ce que le centralisateur d'un élément de G est toujours un sous-groupe normal ?