Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
Filière : L3-Mathématiques

Année 2012-2013
27 juin, 2013

Examen – ALGEBRE 1

Durée 3 heures (documents et calculatrices non autorisés)

(1) (**Question de cours**) Soit p un nombre premier, et $k \in \mathbb{N}^*$.
(i) Montrer que le centre d'un groupe d'ordre p^k n'est pas trivial.
(ii) Montrer que chaque groupe d'ordre p^2 est abélien.

(2) (a) Soient H et K deux groupes et $\varphi : K \to Aut(H)$ un homomorphisme. Montrer que $H \rtimes_\varphi K$ est abélien si et seulement si H et K sont abéliens et $\varphi(k)$ est l'identité pour tout $k \in K$.
(b) Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à un produit semi direct de deux sous-groupes non triviaux.

(3) Soit S_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, et A_n le sous-groupe d'éléments de S_n ayant signature égale à 1.
(a) Montrer que le sous-groupes engendré par les commutateurs de S_n est A_n. (Vous pouvez supposer que A_n est engendré par les 3-cycles.).
(b) Soit $f : S_n \to S_m$ un homomorphisme. Montrer que $f(A_n) \subset A_m$.

(4) Soient p et q deux nombres premiers distincts. Donner la classification de tous les groupes abéliens d'ordre p^4q^2. Quels sont les facteurs invariants de ces groupes ?

(5) Soit $G = GL_n(\mathbb{C})$. Déterminer quels des sous-ensembles suivants sont des sous-groupes. Pour ceux qui sont les sous-groupes, lesquels sont normaux ? Justifier vos réponses.
(a) $\{A \in G | {}^tA = A^{-1}\}$.
(b) $\{A \in G | {}^t\overline{A} = A\}$.
(c) $\{A \in G | A = A^{-1}\}$.
(d) $\{A \in G | A^{-1} = {}^t\overline{A}\}$.
(e) $\{A \in G | \det(A) = 1\}$.
(f) $\{A \in G | \det(A) = -1\}$.