Université de Bourgogne — Année 2014-2015
U.F.R. Sciences et Techniques — 6 janvier 2015
Filière : L3-Mathématiques

Examen – ALGEBRE 1

Durée 3 heures (documents et calculatrices non autorisés)

(1) (**Question de cours**) Soit $n \geq 2$.

(a) Montrer que S_n est engendré par les transpositions. En plus, montrer que S_n est engendré par les transpositions de la forme $(1, j)$, $2 \leq j \leq n$.

(b) Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles de la forme $(1, i, j)$ avec $2 \leq i < j$.

(2) Trouver tous les groupes abéliens d'ordre 72 à isomorphisme près. Donner les facteurs invariants pour chacun de ces groupes.

(3) Soit $\varphi : G_1 \to G_2$ un homomorphisme entre deux groupes.

(i) Si H_1 est un sous-groupe de G_1, montrer que $\varphi(H_1)$ est un sous-groupe de G_2.

(i) Si H_1 est un sous-groupe normal de G_1, est-ce que $\varphi(H_1)$ est un sous-groupe normal de G_2 ? Justifier votre réponse.

(iii) Si K_2 est un sous-groupe de G_2, montrer que $\varphi^{-1}(K_2)$ est un sous-groupe de G_1.

(iv) Si K_2 est un sous-groupe normal de G_2, est-ce que $\varphi^{-1}(K_2)$ est un sous-groupe normal de G_1 ? Justifier votre réponse.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On considère le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de la loi d'addition. Rappel : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est aussi muni d'une loi multiplicative : si $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $[a] \cdot [b] = [ab]$, où $[x]$ est la classe de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Si $[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on dit que $[a]$ est inversible s'il existe $[b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $[a] \cdot [b] = [1]$.

(a) Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ n'est pas un groupe.

(b) Montrer que $[a] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si $pgcd(n, a) = 1$.

(c) On définit $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ comme étant le groupe multiplicatif des matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} \quad \text{avec } [a], [b], [c], [d] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \text{ et telles que } \det(A) \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

On admettra sans démonstration que $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un groupe multiplicatif.

Montrer que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} [\pm 1] & [b] \\ [0] & [1] \end{pmatrix} \middle| [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$$

est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

(d) Trouver le centre $Z(G)$ de G. (Indication : On peut distinguer plusieurs cas selon la valeur de n.)

(e) Trouver le sous-groupe $D(G)$ engendré par les commutateurs de G.

(f) Déterminer le groupe G si $n = 2$ à isomorphisme près.

(g) Montrer que G est isomorphe au groupe D_n si $n \geq 3$.