Université de Bourgogne — Année 2012-2013
U.F.R. Sciences et Techniques — 11 janvier, 2013
Filière : L3-Mathématiques

Examen – ALGEBRE 1
Durée 3 heures (documents et calculatrices non autorisés)

**(1)** (**Question de cours**) Enoncer et démontrer le théorème de caractérisation des produits semi-directs de deux sous-groupes.

**(2)** Soit $S_5$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et soit $A_5$ le sous-groupe alterné. Rappelons que $A_5$ est le sous-groupe de $S_5$ d'éléments de signature égale à 1. Soient $\sigma = (12345) \in S_5$ et $\pi = (12)(34) \in S_5$.
(a) Calculer $\sigma\pi$ et trouver les ordres de $\sigma$, $\pi$ et $\sigma\pi$.
(b) Soit $H$ le sous-groupe de $S_5$ engendré par $\sigma$ et $\pi$. Montrer que $H$ est un sous-groupe de $A_5$, et que l'ordre de $H$ est $\geq 30$. En déduire que $H$ est un sous-groupe normal de $A_5$.
(c) Montrer que tous les 3-cycles dans $A_5$ sont conjugués. En déduire que $H = A_5$.

**(3)** Soit $G$ un groupe, et $H$ un sous-groupe de $G$ (pas nécessairement normal). Soit $X$ l'ensemble $G/H$. On considère l'application $\Phi : G \times X \to X$ donnée par $\Phi(g_1, g_2H) = (g_1g_2)H$ pour tout $g_1, g_2 \in G$.
(a) Montrer que $\Phi$ est bien définie et détermine une action de $G$ sur $X$.
(b) Soit $\varphi : G \to Bij(X)$ l'homomorphisme induit par l'action. (Autrement dit, pour tout $g_1, g_2 \in G$, $\varphi(g_1)(g_2H) = (g_1g_2)H$.) Montrer que $\ker(\varphi) \subset H$.
(c) Montrer que $\ker(\varphi) = H$ si et seulement si $H$ est un sous-groupe normal de $G$.

**(4)** Soit $G = SL_2(\mathbb{R})$.
(a) Soit $H = \{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $H$ est un sous-groupe commutatif de $G$.
(b) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
(i) Montrer que A et B appartiennent à $G$ et calculer les ordres de $A$ et $B$. Soit $K$ le sous-groupe de $G$ engendré par $A$ et $B$. Montrer que que $H$ est un sous-groupe de $K$. Est-il normal ?
(ii) Le groupe $K$ est-il abélien ?
(iii) Calculer l'intersection du groupe cyclique engendré par $A$ et du groupe cyclique engendré par $B$.

**(5)** Si $G$ est un groupe et $H$ est un sous-groupe de $G$, on dit que $H$ est *maximal* si les uniques sous-groupes de $G$ contenant $H$ sont $H$ et $G$. Montrer que $S_{n-1}$ est un sous-groupe maximal de $S_n$ pour tout $n \geq 2$.