Géométrie élémentaire dans le plan et dans l'espace

Dans cette feuille le plan $\mathbb{R}^2$, respectivement l'espace $\mathbb{R}^3$, sont munis du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, respectivement $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1

1. Soient $A(1;1)$, $B(3;2)$ et $C(2;4)$ des points du plan. Calculer la surface du parallélogramme construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Soient les points $A(1;1;1)$, $B(0;1;1)$ et $C(1;0;1)$. Calculer le volume du parallélépide construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 2 Soient $A(1;0)$ et $B(-1;0)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ soient orthogonaux.

Exercice 3 Soient $[OABC]$, un carré du plan. Soit $[OPQR]$ un autre carré du plan contigu au premier et tel que les points O, C et P soient alignés avec C entre O et P . Soit M le point d'intersection de la droite (PA) et de la droite (BQ). Montrer que les points R, M et C sont alignés.
(On peut choisir $A = (1, 0)$ et établir les différentes équations de droite mais on fera auparavant un dessin.)

Exercice 4 Soient $A(1;1;1)$, $B(2;1;0)$ et $C(2;2;1)$, trois points de l'espace.

1. Vérifier que ces 3 points ne sonts pas alignés.
2. Calculer l'aire du triangle (ABC). En déduire la valeur absolue du sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.
3. Donner un vecteur de norme 1 orthogonal au plan défini par les points A, B et C.

Exercice 5 Soit les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} z \\ z' \\ z'' \end{pmatrix}$. Montrer que

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Que peut-on en déduire?

Exercice 6 Calculer les déterminants suivants

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} m & 3 & m \\ m-1 & 2 & -3 \\ 1 & m-2 & -(m+1) \end{vmatrix}$$

On précisera pour quelles valeurs de m le dernier déterminant est nul.

Exercice 7 Soient $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(2;4)$ et $D(4;5)$ des points du plan.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (CD).
3. Déterminer la distance de la droite (AB) à la droite (CD).

Exercice 8 Soient $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$, $C(1;1;-1)$ et $D(2;1;0)$ des points de l'espace.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (OA).
2. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer la distance de la droite (OA) au plan (BCD).

Exercice 9 Soit P le plan d'équations paramétriques

$$\left\{\begin{array}{rc} x = & 1+t \\ y = & 2+s \\ z = & 2t-s \end{array}\right. \quad \text{avec } (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Vérifier que O et le point A de coordonnées $(3,5,1)$ appartiennet à P.
2. Déterminer une équation cartésienne de P et donner un vecteur normal au plan P.
3. Déterminer une équation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire au plan P.

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & 3 \\ 2x & +y & -3z & = & -4 \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & +3y & +z & = & 0 \\ 3x & +2y & +z & = & 2 \\ 5x & +y & +z & = & 5 \end{array}\right.$$

Espaces vectoriels

Exercice 11 Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y=0\}$; $\quad E_1' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | xy=0\}$.
$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x=0, y=z\}$; $\quad E_2' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x=1\}$.
$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+xy \geqslant 0\}$; $\quad E_3' = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f \text{ est croissante}\}$.
$E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(1)=0\}$; $\quad E_4' = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f(0)=1\}$.

Exercice 12 Réunion de sous-espaces vectoriels.

1. Redonner le résultat du cours sur la réunion de 2 sous-espaces vectoriels.

2. Donner un exemple de 2 sous-espaces vectoriels du plan tel que leur réunion n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 13 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et soit $F = \{f \in E / f' = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il existe $f_0 \in F$ tel que $F = Vect(f_0)$.

2. Soit $G = \{f \in E | f(0) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel et que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 14 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Peut-on déterminer x et y pour que $= \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in Vect\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$? Et pour que $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \in Vect\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$?

Exercice 15 Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 16 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que ces vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux et que la famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ n'est pas libre.

Exercice 17 On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$1.\{\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3}\} \qquad 2.\{\vec{e_1}, \vec{e_3}\} \qquad 3.\{\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4}\}$$
$$4.\{3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3}\} \quad 5.\{2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1}\}$$

Exercice 18 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Soient a, b, c, d des nombres réels. Calculer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).

3. Calculer les coordonnées, dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4), de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 19 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 20 Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y - 2t = 0 \text{ et } x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - z + t = 0 \text{ et } y + z = 0\}$$

a- Trouver une base de F et de G.
b- Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires?

Exercice 21 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Donner une base de F.

Exercice 22 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Donner un système d'équations de F.

Exercice 23 Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 24 On considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

2. Même question pour $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$.

Exercice 25 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par $\{a, b, c\}$ et le sous-espace vectoriel G engendré par $\{d, e\}$ où :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels F, G, $F + G$, $F \cap G$.

Applications linéaires

Exercice 26 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Parmi celles qui sont linéaires, dire si elles sont injectives en trouvant le noyau et donner une base de l'image.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + 3y, x - y, 2y) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, -2x - 4y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-x + y + z, x - y - z, 3x + y + z) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (xy, x + z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \to & (x + y + z, x - y - z + 1, x - y + z) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 2y, y - 3). \end{array}$$

Exercice 27 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}$ et soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ l'application qui à f associe f'.

1. Montrer que $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que φ est une application linéaire et donner son noyau.

Exercice 28 Formule de Grassmann.
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , on définit l'application $f : F_1 \times F_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de f.

3. Supposons E de dimension finie. En déduire la dimension de $F_1 + F_2$ en fonction des dimensions de F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$.

Exercice 29 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3). On définit l'endomorphisme f de E par :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ x + 2y - z \\ -x + y - 2z \end{pmatrix}.$$

1. On définit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   a- Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b- Calculer $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   c- Soit u de coordonnées $(1, -3, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

      (i) Donner les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

      (ii) Donner les coordonnées de $f(u)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

      (iii) Donner les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$.

2. Déterminer Im f. Préciser sa dimension ainsi qu'une base.

3. En utilisant le théorème du rang et la question 1-b- déterminer Ker f. Préciser sa dimension ainsi qu'une base.

4. Montrer que Ker $f \oplus$ Im $f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 30 Soit $E = \mathbb{R}^3$, on définit deux endomorphismes f et g par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ -x - 2y + z \\ 2x + 4y - 2z \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x - y + 2z \\ 3x + z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer Ker f et Ker g (équation et base).

2. Quelles sont les dimensions de Im f et Im g ?

3. Donner une base de Im f et de Im g .

4. Montrer que Ker $f \oplus$ Ker $g = \mathbb{R}^3$.

Exercice 31 *Projecteurs et Symétries*
Soit E un espace vectoriel.

1. On appelle *projecteur* une application linéaire p de E dans E telle que $p \circ p = p$.

   (a) Démontrer que si p est un projecteur, $Id - p$ est aussi un projecteur et :

      i. Ker $p =$ Im $(Id - p)$.

      ii. Im $p =$ Ker $(Id - p)$.

   (b) Démontrer que $E =$ Ker $p \oplus$ Im p.
   Dans le cas où E est de dimension finie, démontrer que $E =$ Im $p \oplus$Ker p en utilisant le théorème du rang.

   (c) Montrer que p représente la projection sur Im p parallèlement à Ker p.

2. On appelle *symétrie* une application linéaire s de E dans E telle que $s \circ s = Id$.

(a) Démontrer que $F = \mathrm{Ker}(Id - s)$ et $G = Ker(Id + s)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

(b) Démontrer que s représente la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(c) Notons p la projection sur F parallèlement à G. Examiner s en fonction de p.

Matrice - Déterminants

Exercice 32 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ définie dans la base canonique par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $M^2 = M$.
2. Donner une base du noyau et de l'image de f. Montrer qu'ils sont supplémentaires.
3. Donner la matrice de f dans une base constituée d'un vecteur de Ker f et d'un vecteur de Im f.

Exercice 33 Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

Quelle est la matrice B de h dans ces bases ?

Exercice 34 Notons $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}'$ la base (e'_1, e'_2, e'_3) dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont : $e'_1 = (1, 0, -1)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$, $e'_3 = (1, 0, 1)$. Soit x de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans $\mathcal{B}$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.
En utilisant les matrices :

1. Donner les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Donner les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 35 On rappelle que X et A commutent signifie que $XA = AX$.
Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis celles qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 36 1. En utilisant la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer toutes les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.

2. Notons $S_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = M\}$ et $\mathcal{A}_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = -M\}$.
   (a) Montrer que S_n et $\mathcal{A}_n$ sont des espaces vectoriels.
   (b) Démontrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus \mathcal{A}_n$.
   (c) Déterminer dim S_n et dim $\mathcal{A}_n$.

Exercice 37 Préciser, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, pour quelles valeurs des nombres réels a et b le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 \\ x + 2ay + z = 3 \\ x + y + bz = 3 \end{cases}$$

a zéro, une ou une infinité de solutions.

Exercice 38 La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 39 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} &= 6x_n & +12y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation $U_{n+1} = AU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. Trouver une expression de U_n en fonction de A et de U_0.

3. Trouver le noyau de A, et en donner une base B_1. Calculer le rang de A.

4. Montrer que l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = 3X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera B_2.

5. Montrer que la réunion $B_1 \cup B_2$ forme une base B de $\mathbb{R}^2$. Soit P la matrice formée des composantes des vecteurs de B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que P est inversible, et que le produit $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D qu'on calculera.

6. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer D^n, et en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Donner les termes généraux x_n et y_n.

8. Quel est le lien avec les suites récurrentes linéaires?

Exercice 40 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

Exercice 41 La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre?

Exercice 42 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ b & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A.
2. Etudier le rang de A suivant a et b et en déduire quand la matrice A est inversible.

Exercice 43 Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de t, ces matrices sont-elles inversibles?

Exercice 44 Posons $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$,$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ et pour $n \geqslant 4$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\Delta_n = n + 1$.

Exercice 45 Soit $a \in \mathbb{R}$.On considère le système d'équations linéaires :

$$(S) \quad \begin{cases} 3ax + ay + 2z = -1 \\ ax + ay - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire (S) sous forme matricielle. On appellera A sa matrice.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible?

3. Calculer le rang de (S) en fonction de a.

4. Résoudre (S) en discutant selon les valeurs de a. (Pour chaque valeur de a discutée, décrire *soigneusement* l'ensemble des solutions de (S)).

Vecteurs propres - Polynômes caractéristiques

Exercice 46 Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, les espaces propres des endomorphismes associés aux matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 47 Soit f l'endomorphisme associé dans la base canonique $\mathcal{B}$ à la matrice A suivante

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire les valeurs propres de f.

2. Déterniner une base de chaque espace propre. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de f.

3. Ecrire la matrice B de f dans cettte nouvelle base **puis** écrire la matrice P de passage entre les deux bases.

4. Quel est le lien entre A, B et P?

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer B^n

6. En déduire A^n.

Exercice 48 Reprendre l'exercice précédent (en remplaçant $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^3$) avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 49 On considère l'endomorphisme dont la matrice f associée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & b & 2 & 0 \\ \beta & \gamma & c & 2 \end{pmatrix}.$$

A quelles conditions les paramètres doivent-ils satisfaire pour que la somme des espaces propres de cette matrice soit égale à $\mathbb{R}^4$? Donner une base de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres de f lorsque ces conditions sont satisfaites.