Fiche 5 : Exercices L3 – Algèbre 2
2016-2017

<u>Exercice 1</u> : Soit $\mathbf{K}$ un corps et $P \in \mathbf{K}[X]$. Si $\deg(P) = 2$ ou 3, montrer que P est irréductible si et seulement si P n'a pas de racine dans $\mathbf{K}$. Est-ce que ce résultat est valable pour P de degré égal à 4 ?

<u>Exercice 2</u> : Soit A un anneau principal (ou plus généralement factoriel) et $\mathbf{K}$ sont corps de fractions.

(a) Montrer que l'inclusion de A dans $\mathbf{K}$ induit un homomorphisme injectif de $A[X]$ dans $\mathbf{K}[X]$. Déterminer le groupe d'éléments inversibles de $A[X]$.

(b) (Rappel du cours) :

  (i) Le contenu du produit de deux polynômes de $A[X]$ est le produit des contenus des deux polynômes ;

  (ii) Si le contenu de P est 1, alors P est irréductible dans $A[X]$ si et seulement s'il est irréductible dans $\mathbf{K}[X]$.

(c) Soit $P \in A[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que chaque racine dans $\mathbf{K}$ est aussi dans A.

(d) Si le pgcd des coefficients de $P \in A[X]$ n'est pas 1, qu'est-ce qu'on peut conclure ? Donner un exemple, avec $A = \mathbf{Z}$.

<u>Exercice 3</u> : (Application du critère d'Eisenstein) Déterminer si le polynômes suivants sont irreductibles dans $\mathbf{Z}[X]$ (et dans $\mathbf{Q}[X]$).

(a) $X^7 - 5X^6 - 10X^4 - 25X^3 + 75X - 5$;

(b $X^{20} + 4X^{17} + 6X^3 - 10$;

(c) $X^n - pm$, où p est premier, $m \in \mathbf{N}$ et $p \not| m$ (Par exemple, $X^n - 2$) ;

(d) $X^2 - 8$;

(e) $X^4 - 32$.

<u>Exercice 4</u> : Soit $p \in \mathbf{N}$ un nombre premier. Soit $\Phi_p(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$.

(a) Montrer que $\Phi_p(X)$ appartient à $\mathbf{Z}[X]$. Déterminer les coefficients.

(b) Soit $(X + 1)^p = \sum_{i=0}^{p} a_i X^p$. Montrer que p divise a_i pour $i = 1, \ldots, p - 1$.

(c) Utiliser le critère d'Eisenstein pour montrer que $\Phi_p(X + 1)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

(d) Montrer que $\Phi_p(X)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

(e) Trouver la décomposition de produit de polynômes irréductibles de $(X^n - 1) \in \mathbf{Z}[X]$ pour $n = 4$ et $n = 6$. Quelles sont les racines de dans $\mathbf{C}$ de chaque composante ?

<u>Exercice 5</u> : (Polynômes avec coefficients dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$)

(a) Trouver tous les polynômes irréductibles de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de degré ≤ 4.

(b) Montrer que le polynôme $X^4 + 2X^3 + 4X^2 - 7X + 9$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$ (et dans $\mathbf{Q}[X]$.)

(c) Soit p un nombre premier, et soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme in $\mathbf{Z}[X]$. Soit $\overline{P} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$ l'image de P par l'homomorphisme naturel d'anneaux $\mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$. Si le coefficient dominant de P n'est pas divisible par p, et si $\overline{P}$ est irréductible dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$, alors montrer que P est irréductible.

(d) Déterminer le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré 1,2 et 3 dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$.