Fiche 4 : Exercices L3 – Algèbre 2
2016-2017

Exercice 1 : En cours, vous avez démontré que l'anneau $\mathbf{Z}$ est euclidien où $s(x) = |x|$. Est-ce que la division euclidienne d'un entier a par l'entier b est unique ?

Exercice 2 : Dans cet exercice on va montrer que l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ est euclidien.
(a) Soit $s : \mathbf{Z}[i] \setminus \to \mathbf{N}$ l'application définie par $s(x+iy) = x^2+y^2$. Montrer que $s(z_1z_2) = s(z_1)s(z_2)$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}[i] \setminus \{0\}$.
(b) Montrer que $s(z) > 0$ pour chaque $z \in \mathbf{Z}[i] \setminus \{0\}$.
(c) Montrer que $s(z) = 1$ si et seulement si z est une unité.
(d) Soient $z = x + iy$ et $w = u + iv$ deux éléments de $\mathbf{Z}[i] \setminus \{0\}$. On va définir $q, r \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $z = qw + r$ telles que la relation de la définition de l'anneau euclidien est vérifiée.
  (i) Soit $a + ib = \frac{z}{w} \in \mathbf{C}$ avec $a, b \in \mathbf{Q}$. Montrer qu'ils existent $q_1, q_2 \in \mathbf{Z}$ tel que $|a - q_1| \leq \frac{1}{2}$ et $|b - q_2| \leq \frac{1}{2}$.
  (ii) Soit $q = q_1 + iq_2$, et $r = z - qw$. Montrer que soit $r = 0$ soit $s(r) < s(w)$.
(e) En déduire que $\mathbf{Z}[i]$ est euclidien et donc principal. En particulier un élément de $\mathbf{Z}[i]$ est premier si et seulement s'il est irréductible.
(f) Donner la décomposition dans $\mathbf{Z}[i]$ en produit d'éléments premiers de 2.

Exercice 3 : (Démonstration d'un résultat pour l'exercice suivant)
(a) (Formule de Wilson) Soit $p \in \mathbf{Z}$ un nombre premier. Montrer que $(p-1)! \equiv -1 \mod (p)$. (Indication : Considérer le produit dans le groupe (ou anneau) $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$)
(b) Soit p nombre premier de $\mathbf{Z}$ avec $p \geq 3$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbf{N}$ tel que $x^2 \equiv -1 \mod (p)$.
(c) Soit p nombre premier de $\mathbf{Z}$ avec $p \geq 3$. Montrer que p est somme de deux carrés de $\mathbf{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod (4)$. (Exemple : $13 = 2^2 + 3^2$.)

Exercice 4 : (Eléments premiers de $\mathbf{Z}[i]$) Dans cet exercice, on détermine les éléments premiers de $\mathbf{Z}[i]$. Rappel : (Comme $\mathbf{Z}[i]$ est euclidien, elle est principal, et donc un élément est premier si et seulement si elle est irréductible.
(a) Montrer que $a \in \mathbf{Z}[i]$ est inversible si et seulement si $s(a) = 1$.
(b) Montrer que $3 \in \mathbf{Z}[i]$ est premier, mais $2 \in \mathbf{Z}[i]$ n'est pas premier.
(c) Soit $a \in \mathbf{N}$. Montrer que a est un élément premier de $\mathbf{Z}[i]$ si et seulement si a est premier dans $\mathbf{Z}$ et $a \equiv 3 \pmod 4$.
(d) Soit $z = a + ib \in \mathbf{Z}[i]$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Montrer que z est premier si et seulement si $a^2 + b^2$ est un nombre premier de $\mathbf{Z}$ qui n'est pas congru à 3 modulo 4.

Exercice 5 : Soit $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + \sqrt{5}bi \in \mathbf{C} | a, b \in \mathbf{Z}\}$.
(a) Montrer que A est un sous anneau de $\mathbf{C}$.
(b) Soit $N(z) = |z|^2 \in \mathbf{N}$ pour chaque $z \in A$. Montrer que $N(zw) = N(z)N(w)$.
(c) Trouver les éléments inversibles de A.
(d) En remarquant que $2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i)$, montrer que 2 est irréductible mais pas premier. (Indication : Utiliser la fonction $N : A \to \mathbf{N}$.)

Exercice 6 : Soit A un anneau. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

-

DM1 : L3 − Algèbre 2
2016-2017

<u>**Exercice**</u> **:** Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Soit $P_d \in \mathbf{Q}[X]$ le polynôme : $P_d(X) = X^2 + d$.

(a) Montrer que P_d est irréductible. En déduire que $\mathbf{Q}[X]/(P_d(X))$ est un corps.
(b) Montrer que ce corps est isomorphe à un sous-corps K_d de $\mathbf{C}$. Déterminer K_d.
(c) On dit que $z \in K_d$ est *un élément entier* s'il est racine d'un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$. Montrer que l'ensemble A_d d'éléments entiers de K_d forme un anneau, et K_d est le corps de fractions de A_d.
(d) Déterminer A_5 et A_1. Les-quels sont principaux ?
*(e) Déterminer A_3 est-il principal ?