Fiche 3 : Exercices L3 – Algèbre 2
2016-2017

<u>Exercice 1</u> : Trouver les corps de fractions des sous-anneaux de $\mathbf{C}$ suivants :
(a) $A_1 = \mathbf{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbf{C} | a, b \in \mathbf{Z}\}$;
(b) $A_2 = \mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbf{C} | a, b \in \mathbf{Z}\}$;
(c) $A_3 = \mathbf{Z}[j] = \{a + bj \in \mathbf{C} | a, b \in \mathbf{Z}\}$ où $j = exp(2\pi i/3)$.

<u>Exercice 2</u> : Soit C l'anneau de fonctions continues sur $\mathbf{R}$. (Si $f, g \in C$, alors $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, et $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$.)
(a) Soit $I = \{f \in C | f(0) = 0\}$. Montrer que I est un idéal. Est-il premier ?
(b) Soit $J = \{f \in C | f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer que I est un idéal. Est-il premier ?

<u>Exercice 3</u> : Soit $A \in \mathbf{Q}$ le sous anneau d'éléments de la forme $A = \{\frac{a}{2^k} | a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}\}$.
(a) Montrer que A est le plus petit sous anneau de $\mathbf{Q}$ qui contient $\frac{1}{2}$.
(b) Trouver les éléments inversibles de A.
(c) Trouver les idéaux de A.
(d) Est-ce que A est principal ?

<u>Exercice 4</u> : Soit $\mathbf{K}$ un corps. Montrer que $\mathbf{K}[X]$ est un anneau principal. Est-ce que $\mathbf{Z}[X]$ est un anneau principal ?

<u>Exercice 5</u> : Soit $\mathbf{K}$ un corps et $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré. d.
(a) Montrer que $A = \mathbf{K}[X]/(P)$ est un K-espace vectoriel de dimension d. (Trouver une base.)
(b) Montrer que A est un anneau intègre si et seulement si P est irréductible.
(c) Soit $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ le corps à 2 éléments. Montrer que les anneaux suivants sont à 4 éléments, et ils sont sont tous non-isomorphes.
  (i) $\mathbf{K}[X]/(X^2)$;
  (ii) $\mathbf{K}[X]/(X^2 + X)$;
  (iii) $\mathbf{K}[X]/(X^2 + X + 1)$.
(d) Montrer qu'il y a au moins 4 anneaux non isomorphes à 4 éléments. (Indication : Montrer que le groupe additif pour les groupes trouvés en (c) est toujours $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ces anneaux ne sont pas isomorphes à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.
(e) Avec l'exercice 1(d) de la fiche 1, montrer qu'il y a exactement 4 anneaux (à isomorphisme près) à 4 éléments. Combien de corps à 4 éléments (à isomorphisme près) trouve-t-on ?

<u>Exercice 6</u> :
(a) Soit $\mathbf{K}$ un corps et P un polynôme irréductible. Montrer que $\mathbf{K}[X]/P$ est un corps.
(b) Si $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$, et α est une racine de P dans $\mathbf{C}$, montrer que $\mathbf{K}[X]/P$ est isomorphe au sous-corps $\mathbf{K}[\alpha] \subset \mathbf{C}$, le plus petit sous-anneau de $\mathbf{C}$ qui contient $\mathbf{K}$ et α.