Fiche 2 : Exercices L3 – Algèbre 2
2016-2017

<u>Exercice 1</u> : Soit A un anneau commutatif.
(a) Soit I un idéal de A. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 (i) $I = A$;
 (ii) $1_A \in I$;
 (iii) I contient un élément inversible de A.
(b) Montrer que A est un corps si et seulement si les uniques idéaux de A sont A et $\{0_A\}$.
(c) Supposer que A est intègre. Soient a, b deux éléments non nuls de A. Soit (a) l'idéal engendré par a et (b) l'idéal engendré par b. Montrer que $(a) = (b)$ si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ tel que $a = ub$.

<u>Exercice 2</u> : (Propriété universelle du corps des fractions) Soit A un anneau (commutatif) intègre, et soit $\mathbf{K}$ son corps des fractions. On suppose que $\varphi : A \to F$ est un homomorphisme injectif de A dans un corps F. Montrer qu'il existe un unique homomorphisme $\Phi : \mathbf{K} \to F$ qui prolonge l'homomorphisme φ. Plus précisément, si $\iota : A \to \mathbf{K}$ est l'inclusion de A dans K donnée par la définition du corps de fraction. Montrer qu'il existe un unique homomorphisme Φ tel que $\Phi \circ \iota = \varphi$.

<u>Exercice 3</u> : Soit $n, m \in \mathbf{N}$ avec $n, m \geq 2$.
(a) Montrer qu'il existe un unique homomorphisme d'anneaux φ de $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Quel est le noyau ?
(b) Existe-t-il un homomorphisme $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$? Si oui est il unique ?
(c) Existe-t-il un homomorphisme $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$? Si oui est il unique ?
(d) Pour quels choix de n et m existe-t-il un homomorphisme de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$? Montrer que si un tel homomorphisme existe, alors il est unique. Trouver le noyau et l'image.

<u>Exercice 4</u> : Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A.
(a) Montrer que I est un idéal premier si et seulement si l'anneau A/I est intègre.
(b) Montrer que I est maximal si et seulement si l'anneau A/I est un corps.

<u>Exercice 5</u> :
(a) Déterminer tous les idéaux premiers de l'anneau $\mathbf{Z}$. Déterminer tous les idéaux maximaux de l'anneau $\mathbf{Z}$.
(b) Déterminer tous les idéaux premiers de l'anneau $\mathbf{C}[X]$. Déterminer tous les idéaux maximaux de l'anneau $\mathbf{C}[X]$.
(c) Déterminer tous les idéaux premiers de l'anneau $\mathbf{R}[X]$. Déterminer tous les idéaux maximaux de l'anneau $\mathbf{R}[X]$.
(d) Trouver un idéal premier non nul de l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ qui n'est pas maximal.

<u>Exercice 6</u> : Soit A un anneau commutatif. Soient I et J deux idéaux de A.
(a) Est-ce que l'ensemble $\{ij | i \in I, j \in J\}$ est un idéal ?
(b) Est-ce que l'ensemble $\{i + j | i \in I, j \in J\}$ est un idéal ?
(c) Montrer que $I \cap J$ est un idéal. Comparer les idéaux $I \cap J$ et IJ.
(d) Montrer que $I + J$ est l'idéal engendré par $I \cup J$.

<u>Exercice 7</u> : Montrer que $n\mathbf{Z} \cdot m\mathbf{Z} = nm\mathbf{Z}$. Montrer que $n\mathbf{Z} + m\mathbf{Z} = d\mathbf{Z}$ où $d = pgcd(n, m)$.

<u>Exercice 8</u> : Soit A un anneau (commutatif) et I un idéal de A. Donner une bijection entre l'ensemble des idéaux de l'anneau quotient A/I et l'ensemble des idéaux de A qui contiennent I. Utiliser ce résultat pour déterminer les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

<u>Exercice 9</u> : Soit A un anneau commutatif. On désigne par $N(A)$ des éléments non inversibles de A. On dit que l'anneau A et *local* si pour chaque $a, b \in N(A)$, on a que $a + b \in N(A)$.

(a) Montrer que $a \in N(A)$ si et seulement si $-a \in N(A)$.

(b) Déterminer $N(A)$ pour $A_0 = \mathbf{Z}$, pour $A_4 = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, et pour $A_6 = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

(c) Déterminer si A_0, A_4 et A_6 sont locaux.

(d) Montrer que A est local si et seulement si $N(A)$ est un idéal. Ensuite montrer que si A est local, alors $N(A)$ est un idéal maximal.

(e) Montrer que A est local si et seulement si A a un unique idéal maximal.

(f) Montrer qu'un corps est un anneau local.

(g) Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est local si et seulement si n est la puissance d'un nombre premier.

(h) Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbf{R}$. ($\mathbf{K}$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathbf{R}[X]$.) Soit A le sous-ensemble de $\mathbf{K}$ d'éléments $F \in \mathbf{K}$ tels que $F(0)$ est bien définie. Montrer que A est un anneau local.

<u>Exercice 10</u> : Soit $A = \mathbf{R}[X, Y]$ l'anneau de polynômes à deux variables.

(a) Montrer que l'idéal (X, Y) engendré par X et Y est maximal.

(b) Trouver un idéal I avec $\{0\} \neq I \subset (X, Y)$ qui est premier mais pas maximal.

DM1 : L3 – Algèbre 2

2016-2017

<u>Exercice</u> : Soit A un anneau commutatif. On considère les suites $a = (a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A. Notation : On note cette suite par $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$, et on dit que a est une série formelle. Les a_i sont les coefficients de la série, et le symbole X est l'indéterminé. L'ensemble des séries formelles est noté $A[[X]]$.

(a) Définsser une addition et une multiplication sur $A[[X]]$ tel que $A[[X]]$ est un anneau commutative qui contient l'anneau de polynômes $A[X]$ comme sous-anneau. Justifier votre réponse.

(b) Trouver les éléments inversibles de $A[[X]]$.

(c) Supposons que $A = \mathbf{K}$ est un corps. Montrer que $\mathbf{K}[[X]]$ a un unique idéal maximal.

(d) Trouver tous les idéaux de $\mathbf{K}[[X]]$.