Fiche 1 : Exercices L3 – Algèbre 2
2016-2017

Tous les anneaux considérés unitaires.

<u>Exercice 1</u> :
(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau.
(b) Montrer qu'il existe un et un seul anneau (à isomorphisme près) à 2 éléments. Déterminer cet anneau.
(c) Montrer qu'il existe un et un seul anneau (à isomorphisme près) à 3 éléments. Déterminer cet anneau.
(d) Etude des cas d'anneaux à 4 éléments : Montrer qu'il y a au plus 5 anneaux à 4 éléments. (Plus tard, on va montrer qu'il y en a exactement 4.)
(e) Soit p un nombre premier, et soit A un anneau à p éléments. Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

<u>Exercice 2</u> : Décrire le groupe $\mathcal{U}(A)$ d'éléments inversibles des anneaux suivants :
(a) $A = \mathbb{Z}$;
(b) $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier ;
(c) $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
(d) $A = \mathbb{R}[X]$ l'anneau de polynômes à une variable et à coefficients réels.
(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{[a] | a \wedge n = 1\}$. L'ordre de ce groupe, notée $\varphi(n)$ est appelé l'indicatrice d'Euler de n.
  (i) Montrer que $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ si $n \wedge m$.
  (ii) Déterminer $\varphi(p^r)$ où p est un nombre premier.
  (iii) Soit $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ la décomposition en produit de nombres premiers de n, où $p_1, p_2, \ldots p_r$ sont de nombres premiers distincts. Déterminer la valeur de $\varphi(n)$.

<u>Exercice 3</u> :
(a) Est-ce que $\{-1, 0, 1\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z}$?
(b) Trouver tous les sous-anneaux de $\mathbb{Z}$.
(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Trouver tous les sous-anneaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(d) Montrer que l'ensemble

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{Q} | \ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ avec } 10^n x \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
(d) Montrer que chaque sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{Q} | \ \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ avec } 2^n x \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

<u>Exercice 4</u> : Soit A un anneau. Montrer que $M_n(A)$ est un anneau (non commutatif si $n \geq 2$). Pour les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous anneaux de $M_n(A)$.
(a) L'ensemble des matrices triangulaires supérieurs ;
(b) L'ensemble des matrices de trace égal à 0 ;
(c) $GL_n(\mathbb{R})$ (où $A = \mathbb{R}$) ;
(d) $M_n(\mathbb{Z})$ (où $A = \mathbb{R}$).

Exercice 5 : Soit A un anneau. On considère l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ donnée par

$$\varphi(k) = k \cdot 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k\ fois}.$$

(a) Montrer que φ est un homomorphisme d'anneaux.
(b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le noyau de φ est de la forme $n\mathbb{Z}$. On dit que n est le *caractéristique* de A.
(c) Si A est un anneau commutatif intègre, montrer que n est premier ou $n = 0$.

Exercice 6 : Trouver tous les idéaux de $\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, trouver tous les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 7 : Soit p premier, et soit A un anneau commutatif de caractéristique p. Montrer que l'application $\psi : A \to A$ définie par $\psi(a) = a^p$ est un homomorphisme d'anneaux. Si A est intègre et fini, montrer que ψ est un automorphisme. (Terminologie : ψ est appelé *l'homomorphisme de Frobenius.*)

Exercice 8 : Soit A un anneau commutatif, et soient $a, b \in A$.
(a) Montrer que ab est inversible si et seulement si a et b sont inversibles. Montrer que l'ensemble d'éléments inversibles de A forme un groupe.
(b) Soit $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble de nombres complexes de la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. (Terminologie : les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ sont appelés les *entiers de Gauss.*)
(c) Soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble de nombres réels de la forme $x + \sqrt{2}y$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que A est un sous anneau de $\mathbb{R}$. Montrer que le groupe d'éléments inversibles de A est de cardinal infini.
(d) Soit $\mathbb{Z}[j]$ l'ensemble de nombres complexes de la forme $x + jy$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$ où $j = e^{2\pi i/3}$. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$.

Exercice 9 : Soit $\{A_i | i \in I\}$ une collection d'anneaux commutatifs, et soit $i_0 \in I$.
(a) Montrer que la projection $\pi_0 : \prod_{i \in I} A_i \to A_{i_0}$ définie par $\pi_0((a_i)_{i \in I}) = a_{i_0}$ est un homomorphisme surjectif d'anneaux.
(b) Considerer l'application $\iota_0 : A_{i_0} \to \prod_{i \in I} A_i$ définie par $\iota_0(a) = (b_i)_{i \in I}$ où $b_i = a$ si $i = i_0$, et $b_i = 0$ sinon. Est-ce que ι_0 est un homomorphisme d'anneaux ?

Exercice 10 : Soit A un anneau intègre.
(a) Soit $a, b, c \in A$ avec $c \neq 0$. Montrer que $ac = bc$ si et seulement si $a = b$. Est-ce que ce résultat est vrai pour un anneau non intègre ?
(b) Soit $a \in A$, et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. Montrer que $a = 0$ si et seulement si $a^n = 0$.
(c) Montrer que $a^2 = a$ si et seulement si $a = 0$ ou $a = 1$.
(d) Montrer que $a^2 = 1$ si et seulement si $a = 1$ ou $a = -1$.

Exercice 11 : Soit A un anneau commutatif de cardinal fini. Montrer que tout élément non nul de A est soit inversible, soit diviseur de zéro. En déduire que A est intègre si et seulement si A est un corps.