Indications pour DM2 partie (c)
2016-2017

Rappel du TD : Vous pouvez utiliser la définition de A_d suivante : un élément $z \in K_d$ est dans A_d si et seulement s'il existe un polynôme unitaire P **de degré 2** dans $\mathbf{Z}[X]$ tel que $P(z) = 0$.

Etape 1 : Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $K_d = K_{n^2 d}$ pour chaque d. On peut donc supposer d n'est pas divisible par n^2, pour $n \geq 2$.

Etape 2 : Soit $z \in K_d$. Montrer que $z \in A_d$ si et seulement si $2Re(z) \in \mathbf{Z}$ et $|z|^2 \in \mathbf{Z}$. En particulier, $z \in A_d$ si et seulement si $\overline{z} \in A_d$.

Etape 3 : Montrer que $\mathbf{Z}[i\sqrt{d}] \subset A_d$. En plus, montrer que si $z \in A_d \setminus \mathbf{Z}[i\sqrt{d}]$, alors d est impair et z est de la forme $(a + bi\sqrt{d})/2$ où a et b sont entiers et impairs. (Ici utilisez l'étape 1.)

Etape 4 : Si $z_1, z_2 \in A_d$, montrer en utilisant l'étape 2 que $|z_1 z_2|^2 \in \mathbf{Z}$. Si $z_1 \in \mathbf{Z}[i\sqrt{d}]$ Montrer que $2Re(z_1 z_2) \in \mathbf{Z}$, et donc $z_1 z_2 \in A_d$. Si $z_1, z_2 \in A_d \setminus \mathbf{Z}[i\sqrt{d}]$, utilisez Etape 3 pour montrer que $2Re(z_1 z_2) \in \mathbf{Z}$.

Etape 5 : Montrer que si $z_1, z_2 \in A_d$, alors $z_1 + z_2 \in A_d$.

Conclure.