L1-Math2B : Cours 10

Chapitre 5 : Le déterminant d'une matrice

Pour cette section, on fixe une matrice carrée A de type (n,n) avec coefficient dans $\mathbf{K}$.

1 Dimension 2 et 3

Si $n=2$, alors la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Le **déterminant** de A, noté $\det(A)$ est donnée par

$$\det(A) = ad - bc.$$

On a déjà vu dans le chapitre précédent que la matrice A est inversible si et seulement si le déterminant est non nul. En plus, la valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs colonnes de A.
Si $n=3$, alors la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.
Le **déterminant** de A, noté $\det(A)$ est donnée par

$$\det(A) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

On peut montrer que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. La valeur absolue du déterminant est le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs colonnes de A.
Exemple : On calcule $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$1 \cdot (3+2) - 3 \cdot (3) + 0 = 5 - 9 = -4.$$

2 Cas général

Pour le cas général, on peut définir le déterminant par récurrence sur n. Si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée de type (n,n), pour chaque i et j entre 1 et n, on considère M_{ij} la matrice carrée de type $(n-1, n-1)$ obtenue de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A. Le (i,j)-**cofacteur** de A est défini comme $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.
Le déterminant de A peut être calculé de la manière suivante : $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1}$.
Remarque : On peut montrer que le déterminant peut aussi être calculé en appliquant un développement par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne. Plus précisément, pour chaque i entre 1 et n et pour chaque j entre 1 et n, on a

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Utilliser cette définition du déterminant n'est souvent pas efficace pour le calculer. Pour cette raison, on montrera plus tard dans ce chapitre une méthode par pivot de Gauss qui est plus performant. On commencera avec quelques propriétés du déterminant.
Matrices élémentaires : On va définir 3 familles de matrices carrées dans $M_n(\mathbf{K})$. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et i,j deux indices distinctes entre 1 et n.

[T] $T_{ij}(\lambda) = (t_{k\ell})$, où $t_{kk} = 1$ pour tout k, $t_{ij} = \lambda$, et tous les autres coefficients sont égaux à 0.

[E] $E_{ij} = (e_{k\ell})$, où $e_{kk} = 1$ pour tout $k \neq i$ et $k \neq j$, $e_{ij} = e_{ji} = 1$, et tous les autres coefficients sont égaux à 0.

[D] $D_i(\lambda) = d_{k\ell})$, où $d_{kk} = 1$ pour tout $k \neq i$, $d_{ii} = \lambda$ et tous les autres coefficients sont égaux à 0.

En particulier, $D_i(\lambda)$ est diagonale, obtenue à partir de la matrice identité I_n en remplaçant un coefficient sur le diagonal par λ. $T_{ij}(\lambda)$ est triangulaire (supérieur ou inférieur) obtenue à partir de la matrice identité I_n en remplaçant un coefficient non-diagonal par λ. E_{ij} est obtenue à partir de la matrice identité I_n en échangeant deux lignes.

Examples pour $n = 3$:

$$T_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice :

(i) $\det((T_{ij}(\lambda) = 1$;

(ii) $\det((E_{ij} = -1$;

(iii) $\det(D_i(\lambda) = \lambda$.

Ces matrices correspondent aux opérations élémentaires des lignes et colonnes. Plus précisément, Si A est une matrice quelconque avec n **lignes**, $L_1, \ldots, L_n$.

- $T_{ij}(\lambda)A$ est obtenue en remplaçant L_i par $L_i + \lambda L_j$.
- $E_{ij}A$ est obtenue en échangeant L_i et L_j.
- $D_i(\lambda)A$ est obtenue en remplaçant L_i par λL_i.

En plus, si B est une matrice quelconque avec n **colonnes** $C_1, \ldots, C_n$, alors

- $BT_{ij}(\lambda)$ est obtenue en remplaçant C_i par $C_i + \lambda C_j$.
- BE_{ij} est obtenue en échangeant C_i et C_j.
- $BD_i(\lambda)$ est obtenue en remplaçant C_i par λC_i.

Les démonstrations des deux prochains théorèmes seront donnés l'année prochaine, en L2. Pour cette année, on va les utiliser, sans démonstration.

Propriété du déterminant (SANS DEMONSTRATION) :

Théorème. *Chaque matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ est produit de matrices élémentaires.*

Théorème. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Premieres conséquences de ces deux résultats et la définition :

(i) $\det(A) = \det({}^tA)$;

(ii) Si A est triangulaire, alors $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux ;

(iii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$; (Attention avec la puissance λ^n)

(iv) Si A a une ligne ou une colonne égale à 0, alors $\det(A) = 0$.

(v) $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible ;

Attention : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

3 Calcul du déterminant : Méthode de pivot de Gauss

Opérations élémentaires des lignes

- Rajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne : Cette opération ne change pas le déterminant ;
- Echanger deux lignes : Cette opération multiplie le déterminant par -1 ;
- Multiplier une ligne parλ ($\lambda \neq 0$) : Cette opération est multiplié le déterminant par λ.

La démonstration de ceci vient des résultats précédents. En effets, les opérations élémentaires des lignes correspondent à la multiplication à gauche par une matrice élémentaire. Comme $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, il suffit d'utiliser le résultat de l'exercice sur les déterminants des matrices élémentaires.

Comme $\det(A) = \det({}^tA)$, on a exactement le même résultat pour les colonnes.
Dans la méthode de pivot de Gauss pour calculer un déterminant, on applique des opérations des lignes et/ou colonnes pour obtenir une matrices triangulaire. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ces coefficients diagonaux.

4 Calculer l'inverse d'une matrice carrée par les déterminants

Le déterminant nous donne une nouvelle méthode pour calculer l'inverse d'une matrice carrée.
La matrice $(A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ des cofacteurs est appelé la **comatrice** de A, notée $com(A)$.
Si A est une matrice (n,n), elle est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
Dans ce cas
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t com(A).$$

Exemple : Pour une matrice de type $(2,2)$, on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La comatrice est :
$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$
et on retrouve la formule pour l'inverse d'une matrice de type $(2,2)$ donnée dans le chapitre précédent.

Exemple : On va calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, et comparer avec la réponse trouvée dans le chapitre précédent.
D'abords, on calcul la comatrice. Chaque coefficient est $\pm$ le déterminant d'un mineur 2×2. On commence à noter les coefficients avec signe négatif :
$$\left(\begin{array}{c|c|c} & - & \\ \hline - & & - \\ \hline & - & \end{array}\right).$$
Après on calcule les mineurs. $A_{11} = 0 - 8 = -8$. Alors on inscrit -8 dans la première case de la première ligne. $A_{12} = 6 - 2 = 4$. Donc dans la deuxième case de la première ligne, on inscrit 4, avec le signe négative dans cette case, qui nous donne -4. Ainsi de suite. On trouve finalement
$$com(A) = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 12 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$
Maintenant, on calcule le déterminant. On trouve $\det(A) = -12$.
Finalement $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t com(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
On retrouve le résultat trouvé dans le chapitre précédent.

Remarque. On a maintenant deux méthodes pour déterminer l'inverse d'une matrice (s'il existe). En général, la méthode du pivot de Gauss est plus pratique, car il y a moins de calculs à faire. Cependant, dans certains cas, la méthode avec déterminant est utile, par exemple, pour les matrices 2×2.

5 Le rang d'une matrice

Rappel : le rang d'une matrice A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A. Autrement dit, le rang est la dimension de l'image d'une application linéaire representé par A par rapport à une base. Le rang ne change pas par des opérations élémentaires des lignes et colonnes, donc on peut le calculer par la méthode de Gauss.
Une autre manière de le calculer est par le déterminant.

Une matrice carrée de taille n est de rang n si et seulement si le determinant $\neq 0$. Si A est une matrice de taille $m \times n$, on considère toutes les sous-matrices carrées de A de taille $j \leq \min(m, n)$. Le rang est r s'il existe une sous-matrice de taille $r \times r$ de déterminant $\neq 0$, mais pour chaque sous-matrice de taille $k > r$, le determinant est $= 0$.
Par exemple, une matrice carrée de $M_n(\mathbf{K})$ est de rang n si et seulement si le déterminant est non nul. Si le déterminant est nul, on cherche les mineurs
Une matrice $M_3(\mathbf{K})$ est de rang 3 si le déterminant est non nul. Elle est de rang 2 si le déterminant est 0, mais il existe un mineur 2×2 qui est non nul. Il est de rang 1 si la matrice n'est pas nulle, mais tous les 9 mineurs 2×2 sont nuls.

Chapitre 6 : Changement de bases

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n avec deux bases $\mathcal{B}_E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\mathcal{B}'_E = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$.
Soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension m avec deux bases $\mathcal{B}_F = \{v_1, \ldots, v_m\}$ et $\mathcal{B}'_F = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Le but de ce chapitre, et de comparer la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F et la matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'_E$ de E et $\mathcal{B}'_F$ de F. Avant, on se rappelle les définition de ces matrices et les représentations des éléments comme un vecteur colonne.
Représentation d'un vecteur de E par rapport à la base $\mathcal{B}_E$ par un vecteur colonne : Si $u \in E$, alors il existe une unique combinaison linéaire des vecteurs de base $\mathcal{B}_E$ qui donne u.

$$\boxed{\text{Si } u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \text{ alors } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Mat(u; \mathcal{B}_E).}$$

X est le vecteur colonne qui représente u dans la base $\mathcal{B}_E$.

Pour comparer les matrices obtenues après changement de base, on introduit la notion d'une *matrice de passage.*

Matrice de passage : La matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ de E à la base $\mathcal{B}'_E$ de E, noté $\boxed{P = P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}}$ est la matrice $n \times n$, où la $i$ème colonne est égale à $Mat(u'_i; \mathcal{B}_E)$. Autrement dit, la $i$ème colonne est le vecteur colonne des coefficients de u'_i écrit comme combinaison linéaire dans la base $\mathcal{B}_E$.

On peut remarquer que la matrice de passage $\boxed{P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E} = Mat(id; \mathcal{B}'_E; \mathcal{B}_E)}$, où id est l'identité sur E.

En plus, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$ est inversible, où l'inverse $(P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E})^{-1} = P_{\mathcal{B}'_E}^{\mathcal{B}_E}$.

Maintenant, on compare les vecteurs colonnes qui représentent un vecteur u de E par rapport à deux bases.
Changement de base : Si $X = Mat(u; \mathcal{B}_E)$, et $X' = Mat(u; \mathcal{B}'_E)$, et $P = P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$, alors $\boxed{X = PX'.}$

Rappel :
Matrice d'une application linéaire par rapport aux bases : Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $A = Mat(f; \mathcal{B}_E; \mathcal{B}_F)$ est la matrice $m \times n$, où la $i$ème colonne est $Mat(f(u_i); \mathcal{B}_F)$. Autrement dit, la $i$ème colonne est le vecteur colonne des coefficients de l'image de u_i par f, écrit dans la base $\mathcal{B}_F$.
$\boxed{\text{Si } X = Mat(u; \mathcal{B}_E) \text{ et } A = Mat(f; \mathcal{B}_E; \mathcal{B}_F), \text{ alors } AX = Mat(f(u); \mathcal{B}_F)}$.

Composition d'applications linéaires : Soit H un $\mathbf{K}$-espace vectoriel avec base $\mathcal{B}_H$. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to H$ deux applications linéaires, et soient $A = Mat(f; \mathcal{B}_E; \mathcal{B}_F)$, et $B = Mat(g; \mathcal{B}_F; \mathcal{B}_H)$. Alors $\boxed{BA = Mat(g \circ f; \mathcal{B}_E; \mathcal{B}_H).}$

En particulier, on peut constater que $\boxed{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}}$.

EXEMPLE : Soit $E = \mathbf{R}^3$. Soit $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique, et soit $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3)$. (On remarque d'abord que $\mathcal{B}$ est une base de E. On va calculer la matrice de passage : $P = P_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{B}}$ en utilisant la définition. La première colonne de P est donnée par les coefficients de $e_1 + e_2$ dans la base $\mathcal{C}_3$. Autrement dit, la premiere colonne de P est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule de la même manière les autres colonnes de P. On trouve :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer la matrice $P^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_3}$. On vérifie que $e_1 = (e_1 + e_2) - (e_2 + e_3) + e_3$. Donc la premiere colonne de P^{-1} est :
$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On continue avec les autres colonnes, et on trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut aussi calculer P^{-1} utilisant les formules pour l'inverse d'une matrice (avec méthode du pivot, ou bien méthode de la comatrice). Comme exercice, vous pouvez vérifier que vous trouvez la même matrice.)

Finalement, on peut décrire les matrices de f par rapport aux bases différentes.
<u>**Changement de base**</u> : Soit maintenant $A = Mat(f; \mathcal{B}_E; \mathcal{B}_F)$ et $A' = Mat(f; \mathcal{B}'_E; \mathcal{B}'_F)$. Autrement dit, les matrices A et A' sont deux matrices qui représente la même application linéaire, par rapport aux bases différentes. Soient$P = P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$ et $Q = P_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}'_F}$ les matrices de passages définies plus haut.
En particulier Q est une matrice carrée inversible dans $M_m(\mathbf{K})$, et P est une matrice carrée inversible dans $M_n(\mathbf{K})$.
Alors

$$\boxed{A' = Q^{-1} A P.}$$

EXEMPLE : Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2z \end{pmatrix}$. On soit $F = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$ la base canonique de F, et $\mathcal{B}_2 = (3e_1 + e_2, 2e_1 + e_2)$ une autre base de F. Soit Q la matrice de passage $Q = P_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{B}_2}$. On a $Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Soit $A = Mat(f : \mathcal{C}_3; \mathcal{C}_2)$ et soit $A' = Mat(f : \mathcal{B}; \mathcal{B}_2)$. Alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{B}$ comme dans l'exercice précédent. On peut calculer $A' = Q^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
En effet, on a $f(e_1 + e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2$;
$f(e_2 + e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3(3e_1 + e_2) + 5(2e_1 + e_2)$;

$f(e_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -4((3e_1+e_2)+6(2e_1+e_2)$.

ATTENTION : Il faut faire attention entre l'ordre des matrices ! Vérifier les réponses.

Endomorphismes : Une application linéaire de la forme $f : E \to E$ est appelé un *endomorphisme*. Soit $n = \dim(E)$. L'endomorphisme id =l'identité a pour matrice I_n = la matrice identité, par rapport à n'importe quelle base. On dit qu'un endomorphisme est *inversible* s'il existe un endomorphisme f^{-1} tel que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$. Si l'inverse de f existe et si $A = Mat(f; \mathcal{B}_E)$, alors la matrice $Mat(f^{-1}; \mathcal{B}_E) = A^{-1}$.
Si f est un endomorphisme de E, alors la matrice par rapport à **une base** $\mathcal{B}_E$ de E est donné par $\boxed{A = Mat(f; \mathcal{B}_E) = Mat(f; \mathcal{B}_E; \mathcal{B}_E)}$. En applicant les résultats précédents, si $A = Mat(f; \mathcal{B}_E)$ et $A' = Mat(f; \mathcal{B}'_E)$, alors

$$\boxed{A' = P^{-1}AP.}$$

où P est la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$.
Similitude : On dit que :

Deux matrices carrées A et A' sont *semblables* s'il existe une matrice carrée inversible P tel que $P^{-1}AP = A'$.

Deux matrices sont semblables si et seulement s'il représentent le même endomorphisme par rapport à deux bases, en général différentes.
Si A et A' carrées sont semblables, ils ont le même déterminant, la même trace et le même rang. Autrement dit, si f est un endomorphisme, on peut définir $\det(f)$, $tr(f)$ et $rg(f)$ comme le déterminant, ou la trace ou le rang d'une matrice que représente f par rapport à n'importe quelle base.