Corrigé de TD

Exercice 37.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+ay+z & = & 3 \\ x+2ay+z & = & 3 \\ x+y+bz & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 2a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & b & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & b-1 & 0 \end{array}\right) \underset{l_3 \to l_3 + l_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b-1 & 0 \end{array}\right)$$

- <u>Si $a=0$:</u>
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b-1 & 0 \end{array}\right) \underset{l_3 \leftrightarrow l_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Comme le rang est 2, il y a une infinité de solutions, $\forall b \in \mathbf{R}$.
- <u>Si $a=1$:</u>
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b-1 & 0 \end{array}\right) \underset{l_3 \to l_3 - l_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \end{array}\right)$$
Si $b=1$, le rang est 2, donc il y a une infinité de solutions.
Sinon, le rang est maximal, donc il y a une unique solution.
- <u>Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$:</u>
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b-1 & 0 \end{array}\right) \underset{l_3 \leftrightarrow l_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & b-1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{array}\right) l_3 \to l_3 - \frac{1}{a} l_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b-1}{a} & 0 \end{array}\right)$$
Si $b=1$, il y a une infinité de solutions. Sinon, il y a une unique solution.

Exercice 38.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $det(A) = -3$, la matrice A est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{l_3 \to l_1 + l_2 + l_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_2 \to -l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{3} l_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{l_1 \to l_1 - l_2 \\ l_2 \to l_2 + l_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \underset{l_1 \to l_1 - 2l_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 40.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 11.$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (28-30) + 2(18-20) = -6.$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) = -18.$ (par la question précédente)
4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4.$
5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 - 2C_2 \\ C_4 \to C_4 - 2C_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 2 & 2\cdot 4 & 2 \cdot 4^2 \\ 1 & 3 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 5^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 2 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 4^2 \\ 3 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 5^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \to C_2 - 3C_1 \\ C_3 \to C_3 - 3C_2}}{=} 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \cdot 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \cdot 5 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 12.$$

Exercice 41.

Comme $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, la famille $\{(2,1,0),(1,3,1),(5,2,1)\}$ est libre.