Corrigé de TD

Exercice 39.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & -9x_n - 18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n + 12y_n \end{array}\right.$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$.

1. Le système est équivalent à :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{=U_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{=U_n}$$

Donc $A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Comme $U_1 = AU_0$, $U_2 = AU_1 = A(AU_0) = A^2U_0$, on en déduit que

$$U_n = AU_{n-1} = A(AU_{n-2}) = A^2U_{n-2} = \cdots = A^nU_0.$$

3.
$$\begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} l_1 \widetilde{\to (-\frac{1}{9})} l_1 \\ l_2 \to \frac{1}{6}l \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} l_2 \widetilde{\to l_2} - l_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff x + 2y = 0$. D'où

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 | x + 2y = 0 \right\}$$

Une base est donc $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Le rang de A est 1 car dim(Ker(A))=1.

4.
$$\begin{aligned} E &= \{X \in \mathbf{R}^2 | AX = 3X\} \\ &= \{X \in \mathbf{R}^2 | (A - 3Id)X = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(A - 3Id). \end{aligned}$$

Donc E est un sous-esoace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ car c'est un noyau d'une application linéaire.

$$A - 3Id = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -18 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} l_1 \widetilde{\to (-\frac{1}{6})} l_1 \\ l_2 \to 2l_2 + l_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 3Id) \iff 2x + 3y = 0$. D'où

$$\mathrm{Ker}(A - 3Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 | 2x + 3y = 0 \right\}$$

Une base est donc $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

5. L'ensemble $B_1 \cup B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de R^2 car les deux vecteurs sont linéairement indépendants. Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. On calcule facilement son inverse : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} := D$$

6. On montre que $A^n = PDP^{-1}$ par induction sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, on a $P^{-1}AP = D \iff AP = PD \iff A = PDP^{-1}$. On suppose que $A^k = PD^kP^{-1}$ pour $k \geq 1$.

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = A \cdot (PD^kP^{-1}) = (PDP^{-1}) \cdot (PD^kP^{-1}) = PD^{k+1}P^{-1}.$$

Comme D est une matrice diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 3^n & (-6) \cdot 3^n \\ 2 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

7.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^nU_0 = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 3^n & (-6) \cdot 3^n \\ 2 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -137 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 303 \cdot 3^n \\ -202 \cdot 3^n \end{pmatrix} = 101 \cdot 3^n \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{cases} x_n = 303 \cdot 3^n \\ y_n = -202 \cdot 3^n \end{cases}$$

8. Par ce qui précède, on trouve $2x_n = -3y_n$. Donc $2x_n + 3y_n = 0$, donc $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - 3Id)$. D'où $U_{n+1} = 3U_n$.